Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

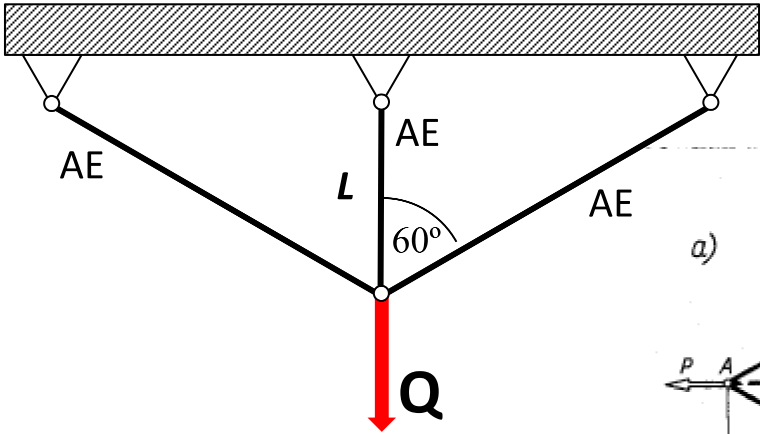
Wykład 13

Zagadnienia sprężysto-plastyczne

Rozciąganie kratownicy trójprętowej poza zakres sprężysty

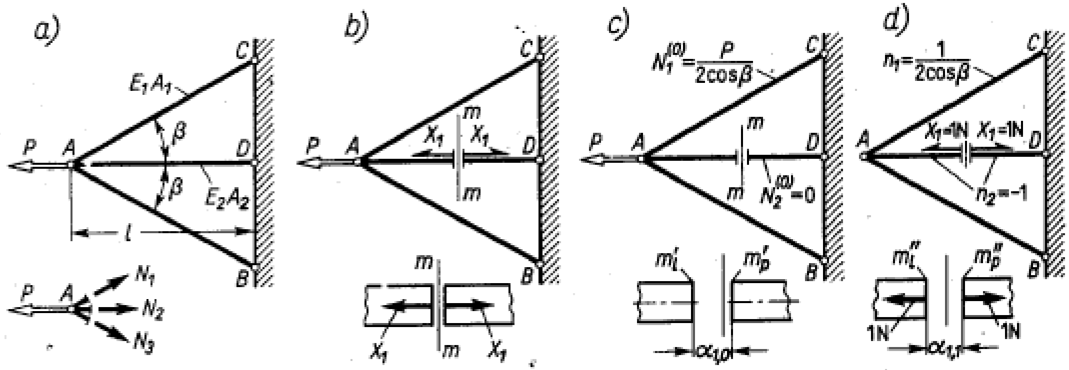
Zginanie sprężysto-plastyczne belki i nośność graniczna

Rozciąganie kratownicy trójprętowej poza zakres sprężysty



Zadanie statycznie niewyznaczalne:
Rozwiązanie metodą sił (M-M)

$$N_1 \sin\beta - N_3 \sin\beta = 0, \qquad N_1 \cos\beta + N_2 + N_3 \cos\beta - P = 0, \qquad \text{(a)}$$

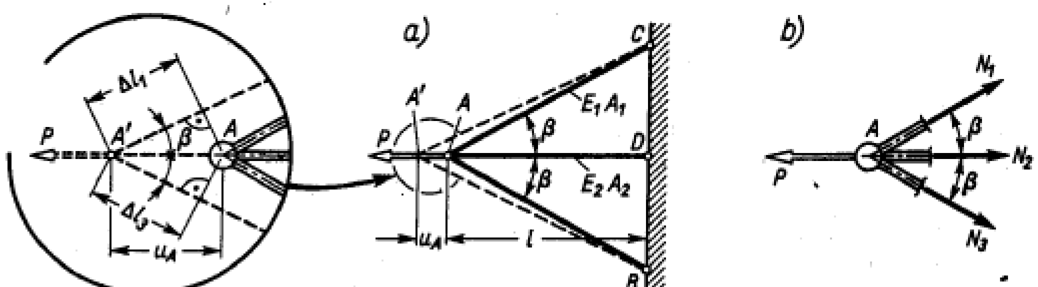


$$X_1 = -\frac{P}{1+2\cos^3\beta\,(E_1A_1/E_2A_2)},$$

Rys. 10.1. Wprowadzenie do metody sił

$$N_1 = N_1^{(0)} + n_1 X_1 = P\frac{(E_1A_1/E_2A_2)\cos^2\beta}{1+2\,(E_1A_1/E_2A_2)\cos^3\beta} = N_3, \qquad N_2 = -X_1.$$

Zadanie statycznie niewyznaczalne:
Rozwiązanie metodą przemieszczeń



Rys. 10.2. Wprowadzenie do metody przemieszczeń

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = u_A \cos\beta, \qquad \Delta l_2 = u_A.$$

Tym wydłużeniom odpowiadają siły wzdłużne w prętach

$$N_1 = N_3 = E_1 A_1 \Delta l_1/l_1 = E_1 A_1 u_A \cos^2\beta/l, \qquad N_2 = E_2 A_2 u_A/l$$

zapewniające równowagę węzła A (rys. 10.2b), czyli

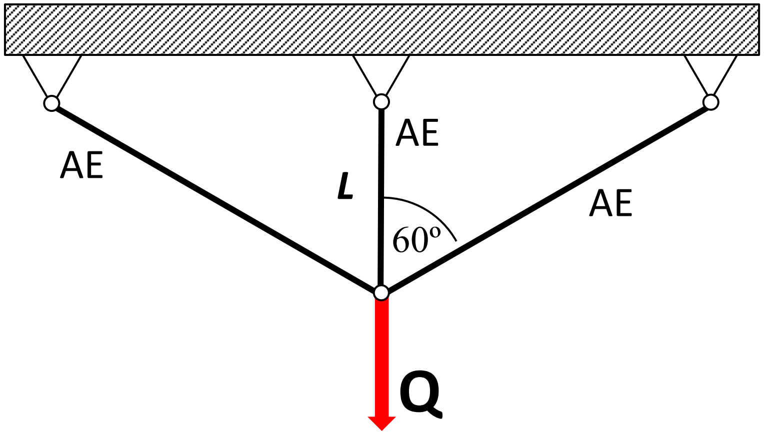
$$2N_1\cos\beta + N_2 - P = 0.$$

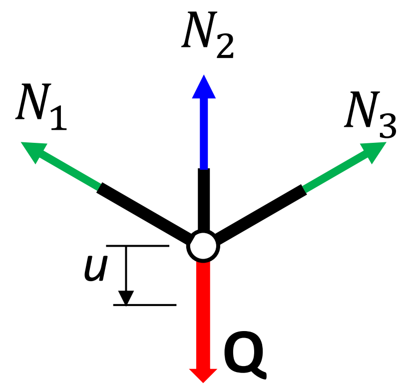
Wstawiając wyrażenia (i) w powyższe równanie mamy

$$u_A = Pl/(2E_1A_1\cos^3\beta + E_2A_2),$$

Rozciąganie kratownicy trójprętowej poza zakres sprężysty

<u>Zadanie statycznie niewyznaczalne</u>:
Rozwiązanie metodą sił (M-M) lub metoda przemieszczeń



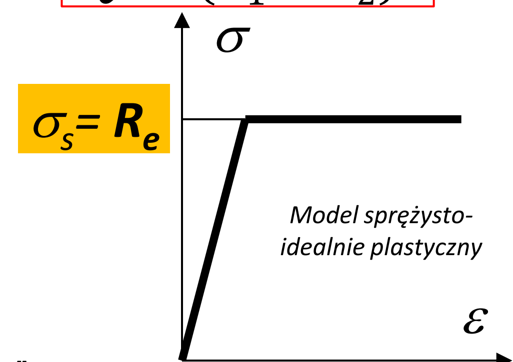


Siły rozciągające w prętach:

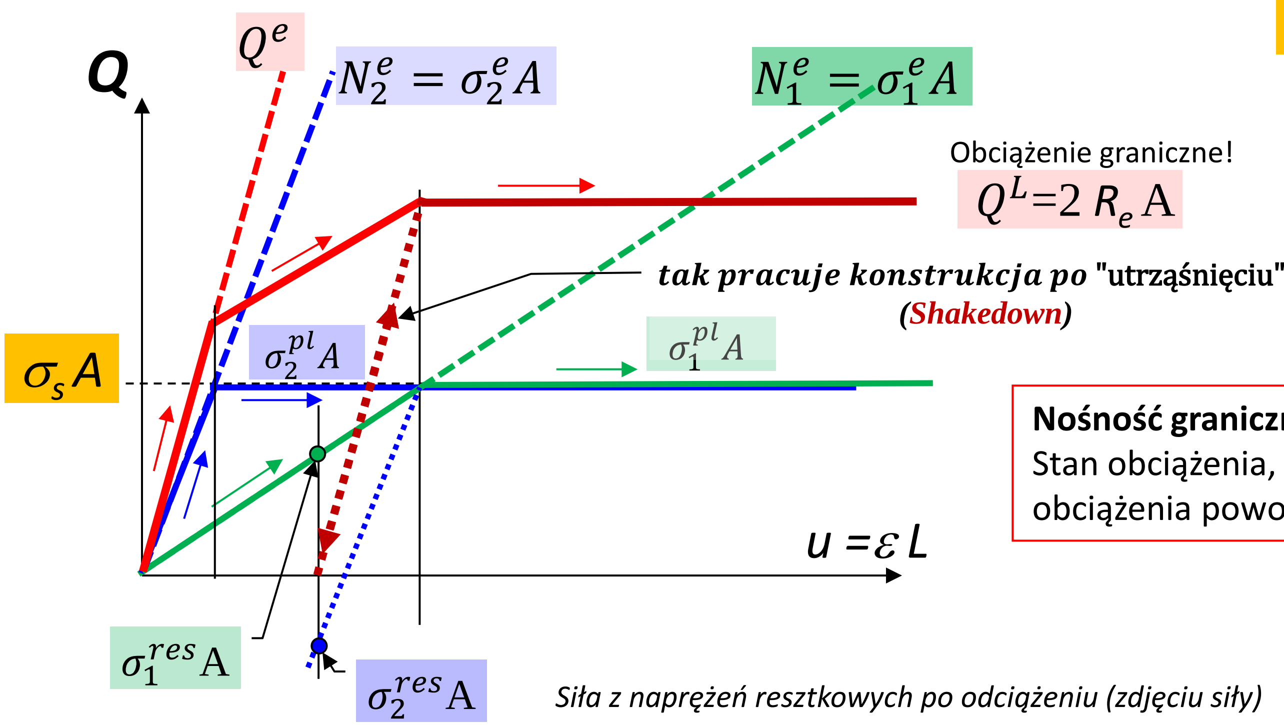
$$\boxed{N_2 = \tfrac{4}{5}\boldsymbol{Q}}$$

$$\boxed{N_1 = N_3 = \tfrac{1}{5}\boldsymbol{Q}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Q} = (N_1 + N_2)}$$



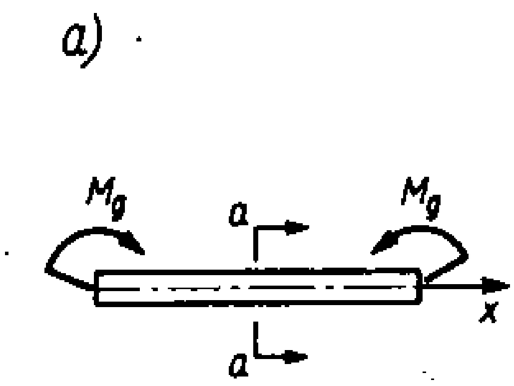
Największe naprężenia sprężyste osiągają granicę plastyczności!



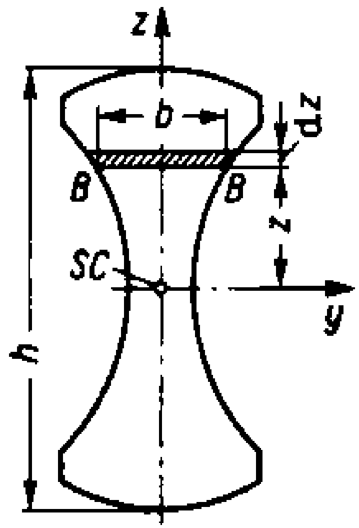
Siła z naprężeń resztkowych po odciążeniu (zdjęciu siły)

Nośność graniczna:
Stan obciążenia, w którym niewielki wzrost obciążenia powoduje duży przyrost przemieszczeń

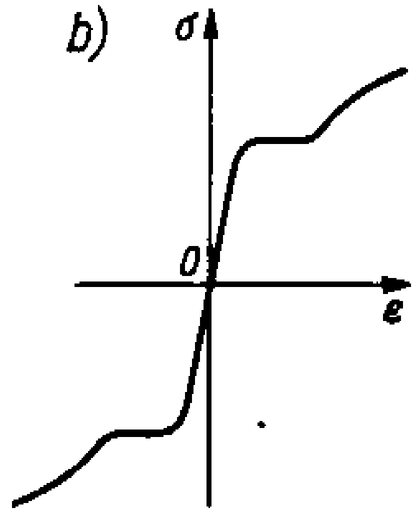
Czyste zginanie sprężysto-plastyczne belki



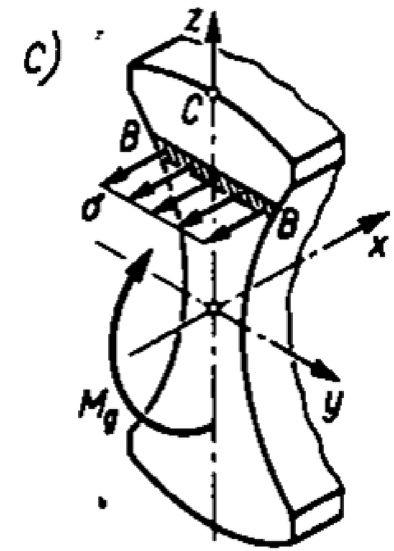
Belka obciążona czystym zginaniem



Przekrój poprzeczny



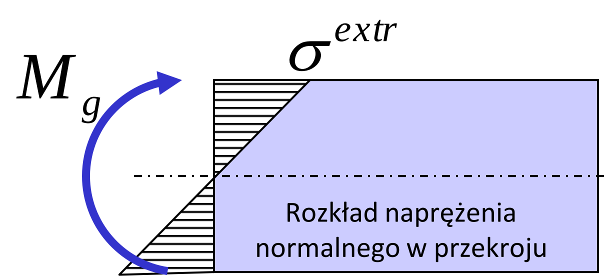
Wykres z próby rozciągania



Naprężenia normalne w przekroju

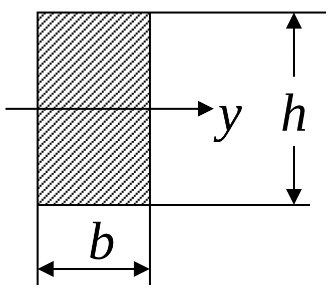
W zakresie sprężystym rozkład naprężenia liczymy ze wzoru:

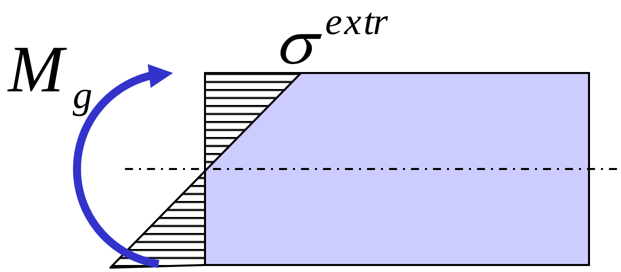
$$\boxed{\sigma = -\frac{M_g \cdot z}{J_y}} \longrightarrow \boxed{\sigma^{extr} = \frac{M_g \cdot \frac{h}{2}}{J_y}}$$

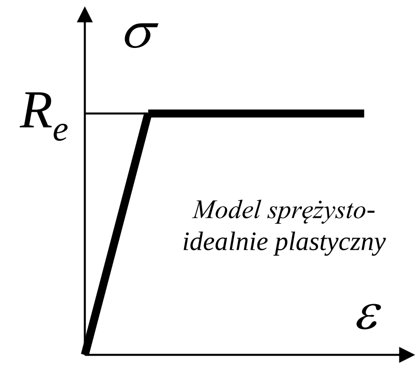


Czyste zginanie sprężysto-plastyczne belki

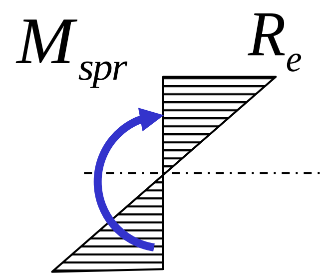
Rozważmy zginanie belki o przekroju prostokątnym wykonanej z materiału o charakterystyce sprężysto-plastycznej bez umocnienia:







W zakresie sprężystym kres wzrostu naprężenia odpowiada osiągnięciu przez skrajne włókna naprężenia o wartości równej granicy plastyczności $\mathbf{R_e}$

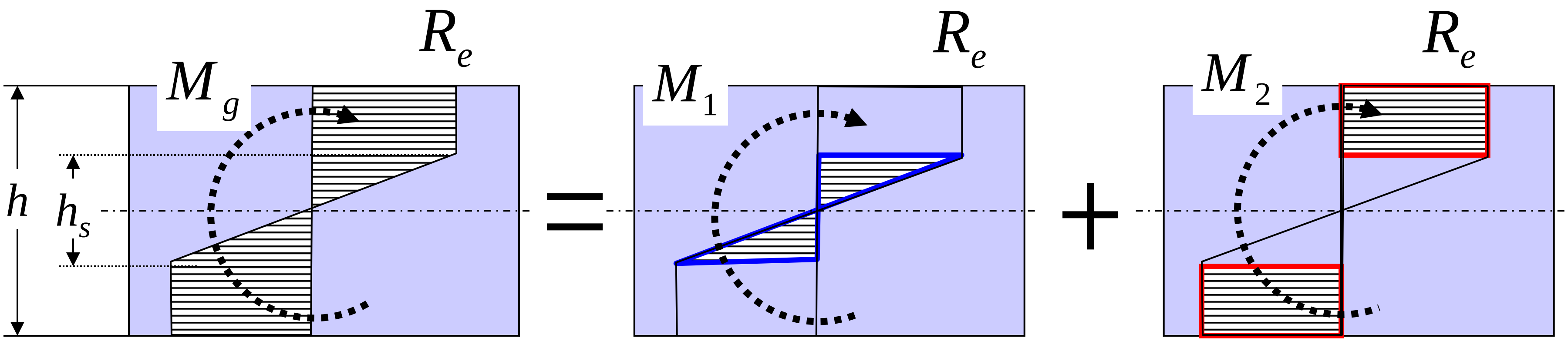


Stąd możemy wyznaczyć maksymalny moment sprężysty dla przekroju prostokątnego:

$$\sigma^{extr} = \frac{M_g \cdot \frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = R_e \quad \longrightarrow \quad \boxed{M_{spr} = \frac{R_e b h^2}{6}}$$

Czyste zginanie sprężysto-plastyczne belki

Po przekroczeniu maksymalnego momentu sprężystego kolejne włókna będą osiągały stan uplastycznienia, a rozkład naprężenia w przekroju będzie miał charakter trapezowy:



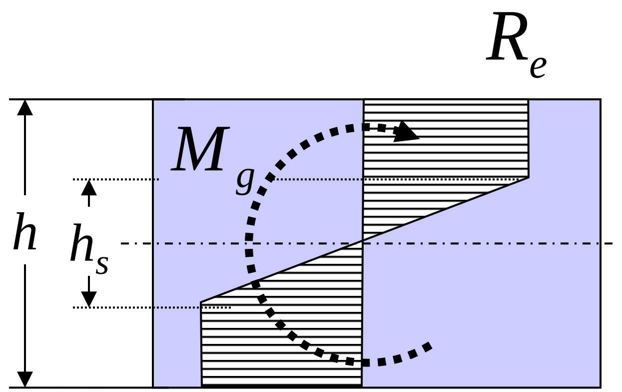
Ten rozkład można przedstawić jako superpozycję dwóch stanów, z których każdy odpowiada części całkowitego momentu gnącego: **M_g=M_1+M_2**

Możemy wyznaczyć wzór opisujący wartość tego momentu:

$$M_g = M_1 + M_2 = \boxed{\frac{R_e h_s^2 b}{6}} + \boxed{b \cdot R_e \frac{(h-h_s)}{2} \cdot \frac{(h+h_s)}{2}}$$

$$\boxed{M_g = \frac{R_e b h^2}{6}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h_s}{h}\right)^2\right]} \rightarrow \boxed{M_g = M_{spr}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h_s}{h}\right)^2\right]}$$

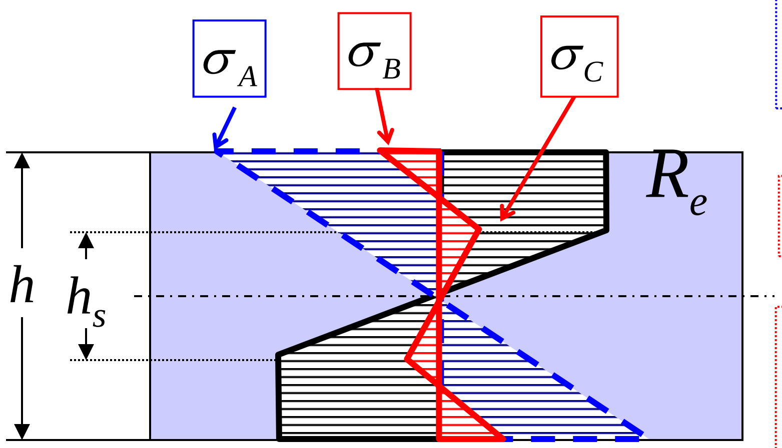
Czyste zginanie sprężysto-plastyczne belki



Moment gnący powodujący pracę sprężysto-plastyczną:

$$M_g = \frac{R_e b h^2}{6}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h_s}{h}\right)^2\right]$$

Jeśli teraz odciążymy belkę, **proces ten będzie miał charakter sprężysty**:



$$\sigma_A = \frac{6M_g}{bh^2} \rightarrow \sigma_A = \tfrac{1}{2} R_e\left[3 - \left(\frac{h_s}{h}\right)^2\right]$$

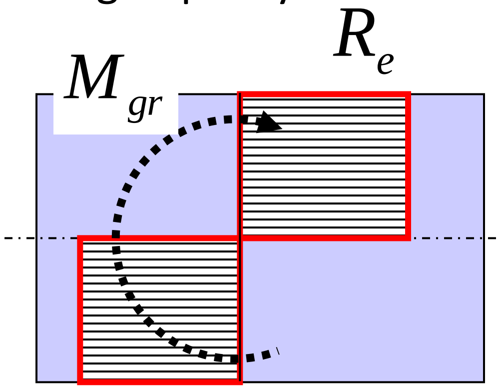
$$\sigma_B = \sigma_A - R_e \rightarrow \sigma_B = \tfrac{1}{2} R_e\left[1 - \left(\frac{h_s}{h}\right)^2\right]$$

$$\sigma_C = \frac{M_g \frac{h_s}{2}}{\frac{bh^3}{12}} - R_e \rightarrow \sigma_C = \tfrac{1}{2} R_e\left[3\cdot\left(\frac{h_s}{h}\right) - \left(\frac{h_s}{h}\right)^3 - 2\right]$$

Po odciążeniu pozostaną **naprężenia resztkowe**

Czyste zginanie sprężysto-plastyczne belki

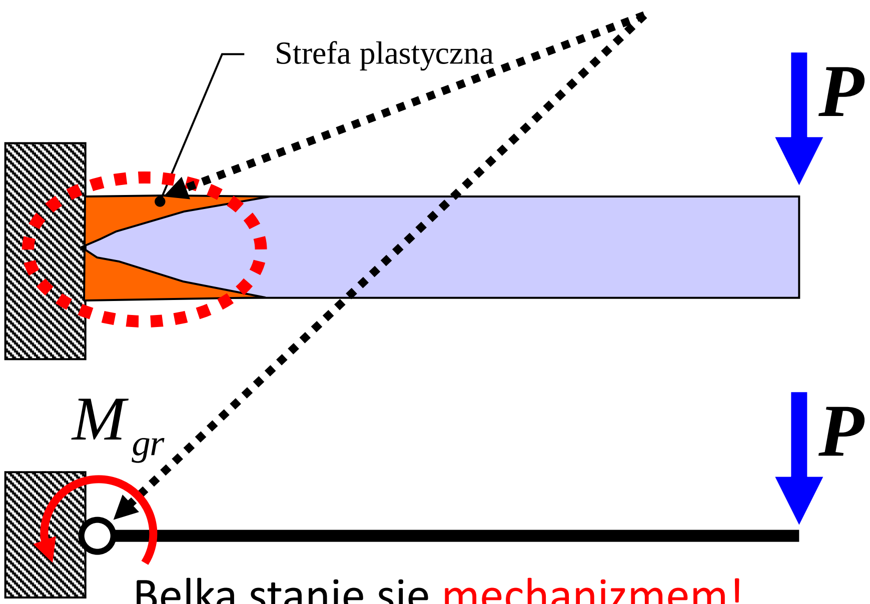
Dla pełnego uplastycznienia mamy **moment graniczny** (wyczerpanie nośności belki):



$$M_g = M_{spr}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h_s}{h}\right)^2\right]$$

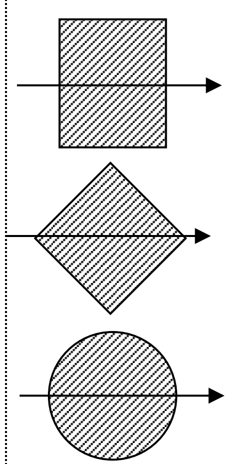
$$\boxed{M_{gr} = M_g\left(h_s = 0\right) = 1{,}5M_{spr}}$$

W belce wspornikowej, przy pełnym uplastycznieniu przekroju w strefie odkształceń plastycznych powstanie **przegub plastyczny!**



Belka stanie się mechanizmem!

Dla różnych przekrojów:



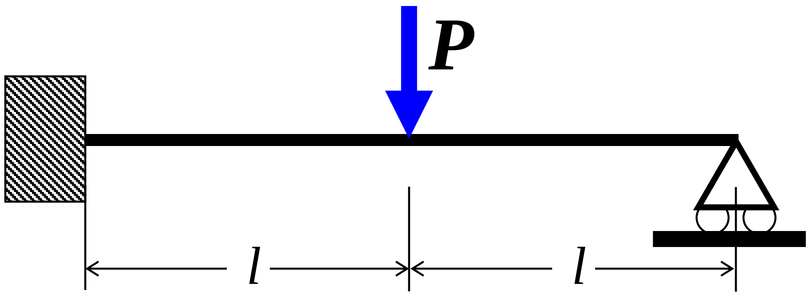
$$\boxed{M_{gr} = 1{,}5M_{spr}}$$

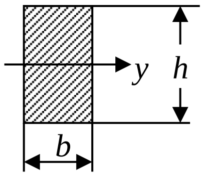
$$\boxed{M_{gr} = 2M_{spr}}$$

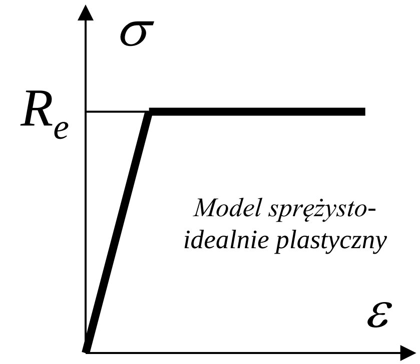
$$\boxed{M_{gr} = \frac{32}{6\pi}M_{spr}}$$

Nośność graniczna belki zginanej

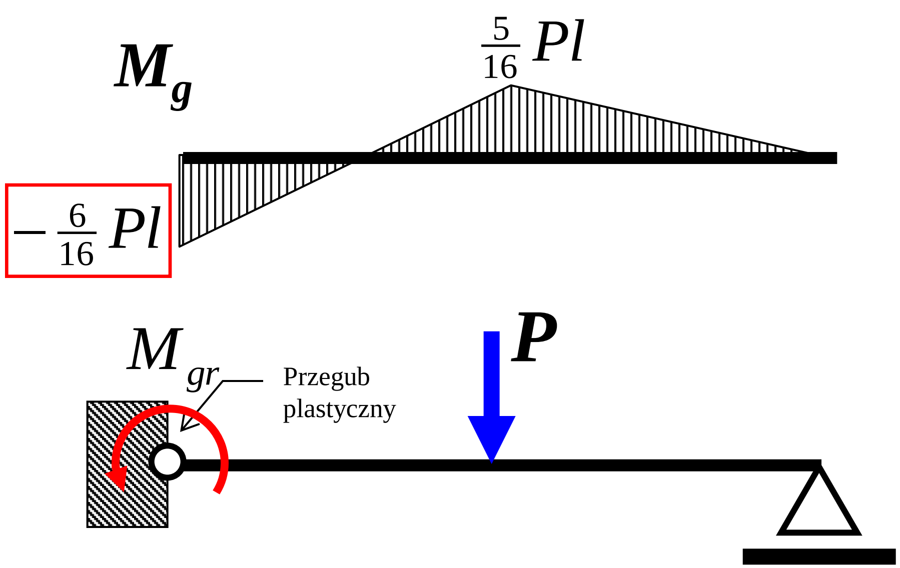
Rozważmy statycznie niewyznaczalną belkę o przekroju prostokątnym wykonaną z materiału o charakterystyce sprężysto-plastycznej bez umocnienia i podpartą jak na rysunku:







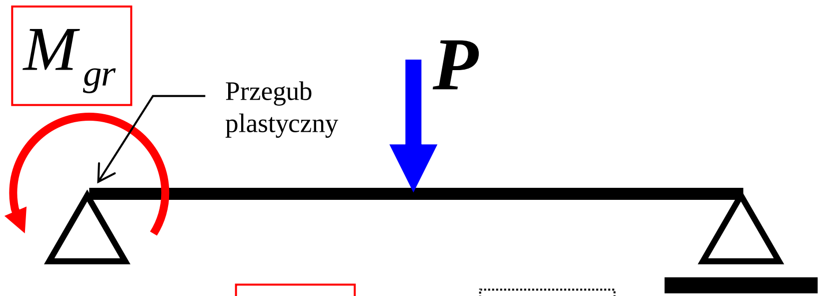
Stosując metodę M-M możemy wyznaczyć rozkład momentu gnącego w zakresie sprężystym:



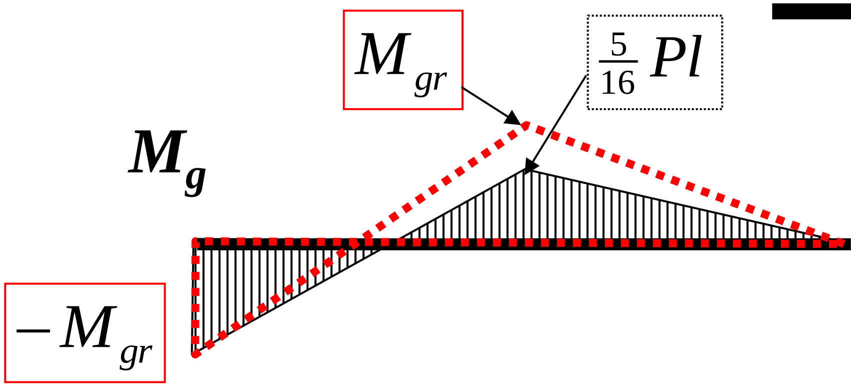
Moment gnący osiąga ekstremalną wartość w miejscu utwierdzenia belki.

Lewy koniec belki to przekrój, w którym najszybciej dojdzie do powstania pierwszych uplastycznień przy sile $\boldsymbol{P_{spr}}$ (wtedy $\boldsymbol{M_{spr}} = \frac{3}{8}Pl$), a przy dalszym wzroście obciążenia może tu powstać **przegub plastyczny**.

Nośność graniczna belki zginanej



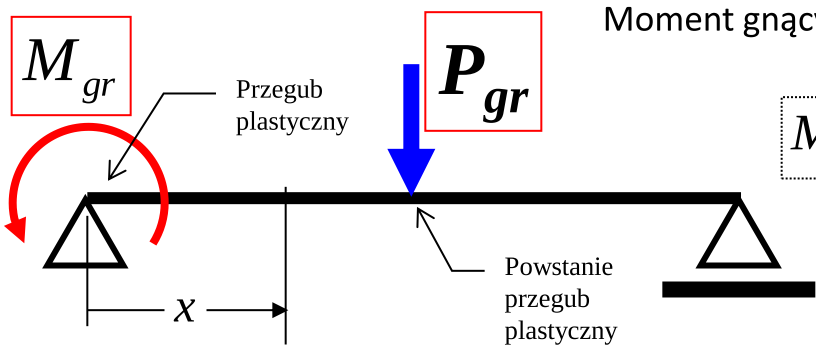
Powstały pierwszy przegub plastyczny *(pełne uplastycznienie przekroju)* zachowuje się tak, jakby belka była podparta przegubowo i obciążona dodatkowo momentem o wartości granicznej ***M***$\boldsymbol{M_{gr}}$ *(wynikającym ze stanu naprężenia)*.



Nośność graniczna:

Graniczny przypadek od którego belka przestanie pracować i stanie się mechanizmem.

Chociaż na lewym końcu powstał przegub plastyczny, to jednak obciążenie może jeszcze wzrastać do momentu, gdy w innym przekroju wartość momentu osiągnie również wartość $\boldsymbol{M_{gr}}$ *(powstanie drugi przegub plastyczny)*



Moment gnący w pierwszym przedziale: $M_g(x) = \frac{1}{2}P_{gr}x - M_{gr}\left(1 - \frac{x}{2l}\right)$

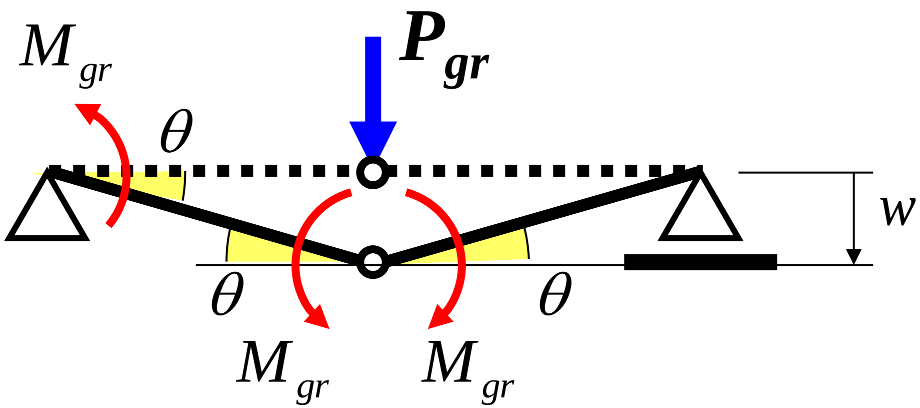
$$M_g(l) = \frac{1}{2}P_{gr}l - M_{gr}\cdot\frac{1}{2} = M_{gr} \rightarrow P_{gr} = \frac{3M_{gr}}{l}$$

$$P_{gr} = \frac{3\cdot\frac{3}{2}M_{spr}}{l} = \frac{3\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{8}Pl}{l} \rightarrow P_{gr} = \frac{27}{16}P_{spr}$$

Utrata nośności zachodzi przy sile 1,688 razy większej niż ta, która spowodowała pierwsze uplastycznienie!

Nośność graniczna belki zginanej

Lepszy sposób (**z zasady prac przygotowanych**): Przewidujemy mechanizm zniszczenia.



Warunek równowagi:

Suma prac sił wewnętrznych i zewnętrznych na dowolnych przemieszczeniach przygotowanych jest równa zero.

$$P_{gr} \cdot w - M_{gr} \cdot \theta - M_{gr} \cdot \theta - M_{gr} \cdot \theta = 0$$

$$P_{gr} \cdot w = 3M_{gr} \cdot \theta \longrightarrow P_{gr} \cdot w \cong 3M_{gr} \cdot \frac{w}{l} \longrightarrow P_{gr} = \frac{3M_{gr}}{l}$$

$$P_{gr} = \frac{3 \cdot \frac{3}{2} M_{spr}}{l} = \frac{3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{8} Pl}{l} \longrightarrow P_{gr} = \frac{27}{16} P_{spr} \cong 1{,}688 \cdot P_{spr}$$

Utrata nośności zachodzi przy sile 1,688 razy większej niż ta, która spowodowała pierwsze uplastycznienie!